

STATIKA KONSTRUKCIJA 1

2007/2008

Dr Marina Rakočević

SADRŽAJ

1. OSNOVNE JEDNAČINE TEHNIČKE TEORIJE ŠTAPOVA U RAVNI

- 1.1.2. Deformacija ose štapa
- 1.1.3. Deformacija štapa
- 1.1.2. Deformacija ose štapa
- 1.1.3. Deformacija štapa
- 1.1.6. Veze između deformacijskih veličina elementa ose štapa, sila u presjecima i temperaturnih promjena
- 1.1.7. Pregled jednačina i graničnih uslova teorije savijanja štapa u ravni
- 1.1.8. Integrali uslova ravnoteže elementa štapa i izrazi za sile u presjecima
- 1.1.9. Integrali deformacijskih jednačina i izrazi za pomjeranja i obrtanja
- 1.1.10. Veze statički nezavisnih veličina i deformacijskih veličina štapa

2. OSNOVNE NEPOZNATE I OSNOVNE JEDNAČINE RAVNIH LINIJSKIH NOSAČA I NJIHOVA KLASIFIKACIJA

- 2.1. Elementi i čvorovi nosača
- 2.2. Osnovne nepoznate nosača
- 2.3. Uslovi kompatibilnosti pomjeranja čvorova nosača
- 2.4. Uslovi ravnoteže nosača
- 2.5. Klasifikacija nosača
- 2.5.1. Kinematička klasifikacija nosača
- 2.5.1. 1. Unutrašnja kinematička stabilnost sistema
- 2.5.2. Statička klasifikacija nosača

3. PRINCIP VIRTUALNIH POMJERANJA I PRINCIP VIRTUALNIH SILA

- 3.1. Moguće ravnotežno stanje i moguće stanje deformacije nosača
- 3.2. Veza mogućih ravnotežnih stanja i mogućih statičkih deformacija- princip virtualnih pomjeranja i princip virtualnih sila

4. DIJAGRAMI UTICAJA I UTICAJNE LINIJE

- 4.1. Uticaji u nosačima. Stalno i pokretno opterećenje
- 4.2. Ekstremne vrijednosti uticaja
- 4.3. Pojam uticajne funkcije i uticajne linije
- 4.4. Računanje vrijednosti uticaja iz uticajne linije
- 4.4.1. Sistem koncentrisanih sila
- 4.4.2. Raspodijeljeno opterećenje
- 4.4.3. Koncentrisani momenat

- 4.5. Određivanje mjerodavnog položaja i proračun ekstremnih vrijednosti uticaja
- 4.5.1. Jednako podijeljeno pokretno opterećenje
- 4.5.2. Pokretan sistem vezanih koncentrisanih sila
- 4.6. Konstrukcija uticajnih linija za reakcije i sile u presjecima primjenom statičke metode

5. STATIČKI ODREĐENI NOSAČI. REAKCIJE I SILE U PRESJECIMA

- 5.1. Metoda čvorova i metoda dekompozicije
- 5.2. Nosači koji se sastoje od jedne kinematički krute ploče
 - 5.2.1. Prosta greda
 - 5.2.2. Greda sa prepustom
 - 5.2.3. Greda sa dva prepusta:
 - 5.2.3. Konzola
- 5.3. Nosači koji se sastoje od dvije kinematički krute ploče
Nosač sa tri zglobova od kojih je jedan imaginaran
 - 5.3.1. Reakcije i sile u presjecima nosača sa tri zglobova usljed stalnog opterećenja
 - 5.3.2. Oblik ose lučnih nosača
- 5.4. Nosači koji se sastoje od lanca ploča
 - 5.4.1. Određivanje reakcija
 - 5.4.2. Uticaj stalnog opterećenja na gredu sa zglobovima
- 5.5. Statički određeni okvirni nosači
- 5.6. Nosači koji se sastoje od lanca ploča i niza prostih štapova
 - 5.6.1. Luk sa tri zglobova sa zategom
 - 5.6.2. Vitak poligonalni luk sa gredom za ukrućenje ispod luka
 - 5.6.3. Lančani nosač sa gredom za ukrućenje ispod lanca
 - 5.6.4. Poligonalni luk sa gredom za ukrućenje iznad luka

6. UTICAJNE LINIJE ZA REAKCIJE I SILE U PRESJECIMA STATIČKI ODREĐENIH NOSAČA

- 6.1. Prosta greda. Granične vrijednosti momenata savijanja i tranverzalnih sila-jednakopodijeljeno pokretno opterećenje
- 6.2. Konzola
- 6.3. Greda sa prepustima
- 6.4. Luk na tri zglobova
- 6.5. Gerberovi nosači
- 6.6. Luk sa tri zglobova sa zategom
- 6.7. Langerova greda
- 6.8. Lančani most sa gredom za ukrućenje
- 6.9. Poligonalni luk sa gredom za ukrućenje iznad luka

7. STATIČKI ODREĐENI REŠETKASTI NOSAČI . SILE U ŠTAPOVIMA REŠETKE

- 7.1. Metoda presjeka
- 7.2. Analitički izrazi za sile u štapovima rešetke sa trougaonom ispunom
- 7.3. UTICAJNE LINIJE STATIČKI ODREĐENIH REŠETKASTIH NOSAČA
 - 7.3.1. Reakcije i sile veze
 - 7.3.2. Rešetkasta prosta greda sa prostom trougaonom ispunom
 - 7.3.3. Gerberov nosač
- 7.4. Luk sa tri zloba

8. ODREĐIVANJE REAKCIJA I SILA U PRESJECIMA PRIMJENOM PRINCIPA VIRTUALNIH POMJERANJA

- 8.1. Osnovni stavovi o komplanom kretanju ploče
- 8.2. Relativna pomjeranja ploča
- 8.3. Pomjeranje prinudnog mehanizma
- 8.4. Uticajne linije za reakcije i sile u presjecima
 - 1. Uticajna linija za reakciju oslonca
 - 2. Uticajna linija za momenat uklještenja
 - 3. Uticajna linija za momenat savijanja
 - 4. Uticajna linija za transverzalnu silu
 - 5. Uticajna linija za normalnu silu
 - 6. Uticajna linija za silu u štapu rešetke

9. POMJERANJA STATIČKI ODREĐENIH NOSAČA

- 9.1. Određivanje pomjeranja čvorova rešetkastog nosača iz uslova kompatibilnosti pomjeranja. Williot-ov plan pomjeranja
- 9.2. Dijagrami pomjeranja punih nosača
 - 9.2.1. Statičko- kinematička analogija štapa
 - 9.2.2. Numerički postupak proračuna dijagrama
 - 9.2.3. Statičko-kinematička analogija poteza štapova
- 9.3. Primjena principa virtualnih sila na proračun pomjeranja nosača
 - 9.3.1. Izrazi za pomjeranja
 - 9.3.2. Numerički postupci za proračun pomjeranja
 - 9.3.3. Određivanje dijagrama pomjeranja punih i rešetkastih nosača pomoću elastičnih težina
- 9.4. Teoreme o uzajamnosti
 - 9.4.1. Teorema o uzajamnosti radova
 - 9.4.2. Teorema o uzajamnosti pomjeranja izazvanih jediničnim silama
 - 9.4.3. Teorema o uzajamnosti reakcija statički neodređenih nosača
 - 9.4.4. Teorema o uzajamnosti reakcija i pomjeranja statički neodređenih nosača
- 9.5. Proračun uticajnih linija za pomjeranje primjenom teoreme o uzajamnosti pomjeranja

10. STATIČKI NEODREĐENI NOSAČI- METODA SILA

- 10.1. Statička neodređenost nosača
- 10.2. Uslovne jednačine za statički neodređene veličine
- 10.3. Alternativni postupak za izvođenje uslovnih jednačina
- 10.4. Izbor osnovnog sistema
- 10.5. Kontrola tačnosti proračuna koeficijenata uslovnih jednačina
- 10.6. Rješavanje uslovnih jednačina za statički neodređene veličine
- 10.7. Uprošćenje uslovnih jednačina – simetrični nosači
- 10.8. Uticajne linije za statičke veličine
 - 10.8.1. Statička metoda konstrukcije uticajnih linija
 - 10.8.2. Kinematička metoda konstrukcije uticajnih linija
- 10.9. Proračun pomjeranja statički neodređenih nosača
 - 10.9.1. Proračun pomjeranja statički neodređenih nosača usled opterećenja
 - 10.9.2. Proračun pomjeranja statički neodređenih nosača usled dejstva temperaturnih razlika, temperaturnih promjena u osama štapova i pomjeranja oslonaca
 - 10.9.3. Uticajne linije za pomjeranja
- 10.10. KONTINUALNI NOSAČI
 - 10.10.1. Uslovne jednačine kontinualnih nosača
 - 10.10.2. Postupak sa stalnim tačkama
 - 10.10.3. Uticajne linije za statički neodređene veličine
 - 10.10.4. Konstrukcija uticajnih linija primjenom kinematičke metode
 - 10.10.5. Uticajne linije za reakcije i sile u presjecima
 - 10.10.6. Granične vrijednosti transverzalnih sila usled jednako podijeljenog pokretnog opterećenja

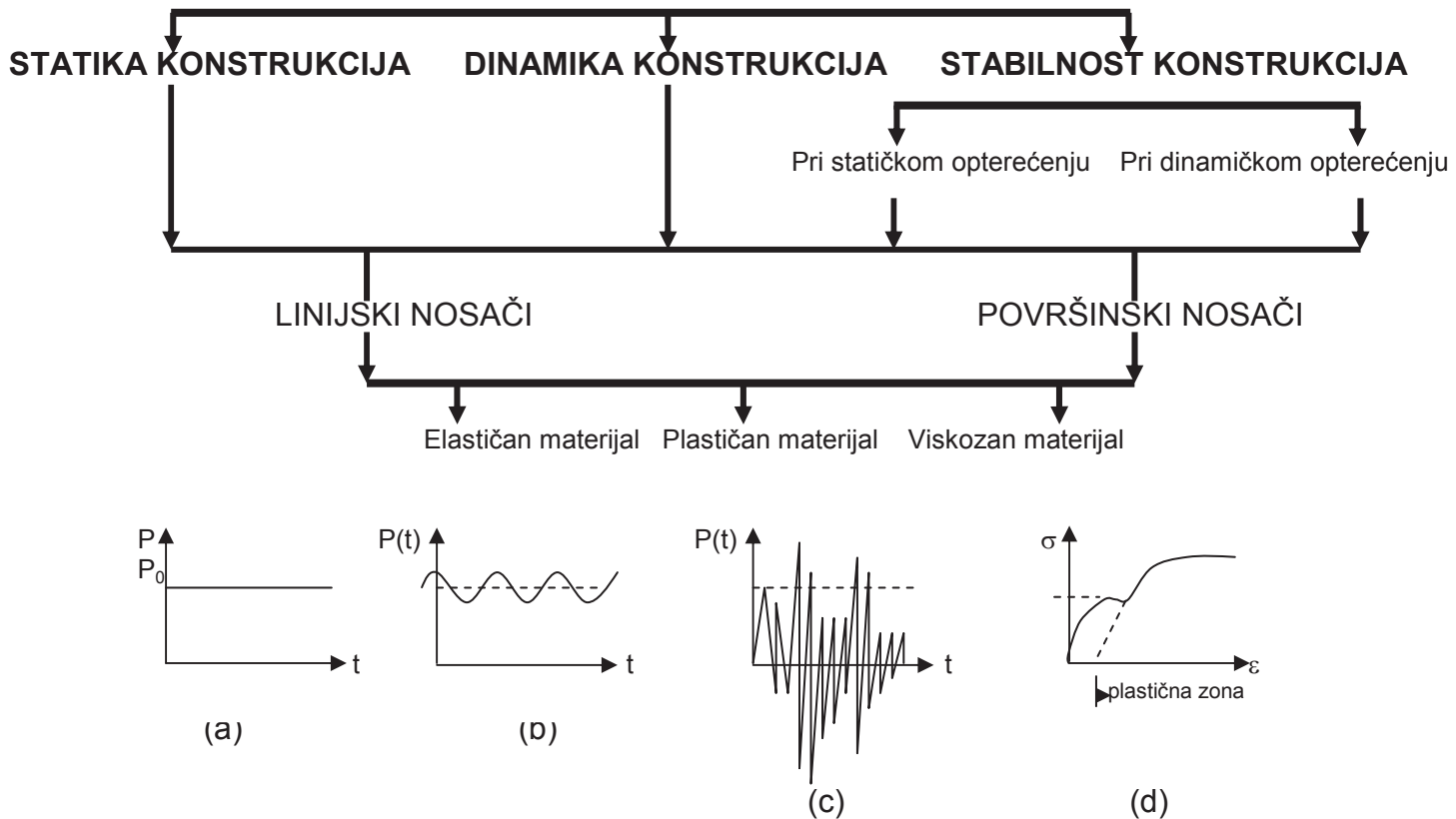
UVOD

Stručno-naučna disciplina koja se bavi proračunom napona, deformacija i pomjeranja u inženjerskim konstrukcijama u skladu sa zakonima mehanike deformabilnog tijela naziva se TEORIJA KONSTRUKCIJA.

U zavisnosti od vrste opterećenja na koje računamo uticaje (napone, deformacije i pomjeranja) razlikujemo sljedeće oblasti teorije konstrukcija:

- STATIKA KONSTRUKCIJA
- DINAMIKA KONSTRUKCIJA
- STABILNOST KONSTRUKCIJA

Predmet izučavanja u Statiki konstrukcija su metode proračuna uticaja usled dejstva opterećenja koje se ne mijenja u toku vremena (slika 1a.), dok se u Dinamici konstrukcija izučavaju metode proračuna uticaja usled dejstva opterećenja koje se mijenja u toku vremena (slika 1b, c).

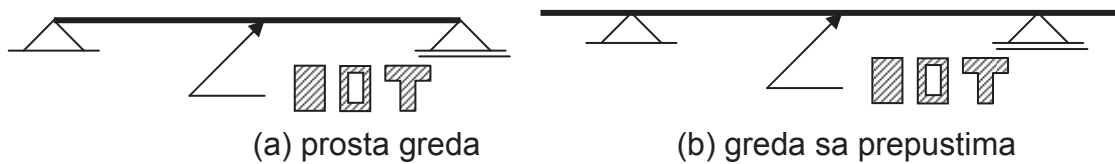


Slika 1.

Predmet analize ponašanja inženjerskih konstrukcija je iznalaženje odgovora konstrukcije na dejstvo opterećenja i drugih spoljašnjih uticaja. Statički odgovor konstrukcije se opisuje stanjem napona (sila) i stanjem deformacija (pomjeranja), kao i provjerom stabilnosti sistema kao cjeline i njegovih pojedinih djelova. Prvi korak u analizi konstrukcija predstavlja izbor IDEALIZOVANOG MODELA kojim se aproksimira data konstrukcija odnosno simulira njeno ponašanje. Modelom se idealizuje geometrija konstrukcije, način oslanjanja, opterećenje kao i mehanička

svojstva materijala u konstrukciji. Izbor modela ostavljen je inženjerskom sudu uz to da idealizovani model treba da zadovolji dva bitna uslova: da što bolje aproksimira konstrukciju i da je jednostavan i pogodan za praktičnu primjebu. Zaključuje se da predmet analize nijesu stvarne konstrukcije već idealizovani modeli.

Konstrukcija se sastoji od djelova, odnosno, elemenata konstrukcije koje jednim imenom nazivamo nosači (stubovi, grede, ploče, isl.). Nosače prikazujemo šematski linijama ili površinama tj. idealizovanim modelom. Nosači koje prikazujemo linijama (prave, izlomljene i krive) nazivaju se linijski nosači (prosta greda –slika 2a, greda sa prepustima 2b, gerberov nosač, ram, i sl.).



Slika 2.

Ploče i ljuske ne možemo prikazati kao linijske nosače već ih nazivamo površinskim nosačima.

Nakon definisanja vrste nosača koji treba sračunati i analizirati, prelazimo na izbor metode proračuna i karakteristika materijala.

Sve građevinske konstrukcije sadrže konstruktivni sistem koji se sastoji od elemenata sistema. Konstruktivni sistem nosi cijelu konstrukciju sa svih arhitektonskim i konstruktivnim elementima.

Metode teorije konstrukcija zasnovane su na Mehanici deformabilnog tijela.

Mehanika deformabilnog tijela je dio mehanike koji izučava ponašanje čvrstih tijela uzimajući u obzir njihovu deformabilnost. Ovo je veoma široka oblast koja obuhvata niz disciplina koje tretiraju različite aspekte problema:

- teorija elastičnosti obuhvata probleme elastičnih deformacija
- teorija plastičnosti obuhvata probleme plastičnih deformacija i dr.

Zavisno od veličine deformacija razvila se posebno teorije malih i velikih deformacija. Kada je priroda opterećenja takva da se mogu zanemariti inercijalni efekti, riječ je o statički deformabilnih tijela, ili obrnuto, riječ je o dinamički deformabilnih tijela. Posebnu oblast predstavlja fenomen nastanka pukotina i njihova propagacija sve do loma posmatranog tijela. Uz ovo najviše problema vezujemo za oblik i geometriju tijela - linijske i površinske nosače.

Na osnovu ovoga zaključuje se da mehanika deformabilnog tijela obuhvata čitav spektar problema, čije je rješavanje često vrlo složeno, pa se vrlo često ne mogu dobiti analitička rješenja već se koriste numeričke metode. Od numeričkih metoda najpoznatija je metoda konačnih elemenata na kojoj su zasnovani većina programskih paketa za proračun uticaja (SAP, STRES, TOWER, isl.) .

Istorijski razvoj metoda za proračun linijskih nosača

Klasične metode Teorije konstrukcija koje su zasnovane na mehanici deformabilnih tijela u analizi inženjerskih konstrukcija počinju da se razvijaju u prvoj polovini 17.

vijeka kada je Galileo Galilej izučavao ponašanje skeletne konstrukcije broda izložene dejstvu spoljašnjih sila. Od tog vremena do danas uočava se ogroman napredak u razvoju Teorije konstrukcija i metoda analize.

Osnove Teorije konstrukcija utemeljene su radovima vodećih istraživača i naučnika 18. i 19. vijeka kao što su Newton (1642.-1727.), Coulomb (1736.-1806.), Euler (1707.-1783.), Poisson (1781.-1840.), Navier (1785.-1857.), Saint Venant i drugi. Na osnovu ovih istraživanja, krajem 19 i početkom 20. vijeka, formulisane su i kasnije usavršene primjenljive inženjerske teorije i metode analize. Među tim metodama, prvo su se formulisale danas dobro poznate metode statike linijskih nosača.

- J.C. Maxwell (1831.-1879.), izlaže postupak za proračun statički neodređenih linijskih nosača;
- O. Mohr (1835.-1918.) izlaže sličan postupak;
- Muller- Breslau, 1886., izlaže novi postupak proračuna statički neodređenih linijskih nosača usvajajući reakcije oslonaca i presječne sile za nepoznate veličine (metoda sila);
- H. Manderla, 1880., daje ideju o korišćenju pomjeranja i obrtanja čvorova kao osnovnih neodređenih veličina (tačna metoda deformacija). Imajući u vidu veliki broj jednačina koji se pojavljuje u ovoj metodi, kao i raspoloživa proračunska sredstva, ova metoda nije imala široku primjenu;
- O. Mohr je predložio uprošćeni postupak koji je predložio Manderla, određujući pomjeranja čvorova datog nosača kao pomjeranja čvorova nosača sa zglavkastim vezama. Na taj način broj jednačina se znatno smanjio (približna metoda deformacije);
- A. Bedihen i G.A. Maney prethodnu metodu uopštavaju i primjenjuju za okvirne konstrukcije;
- Nakon toga 1920. godine razvijeno je nekoliko iterativnih metoda za proračun linijskih nosača;
- H. Cross, 1930., predlaže Krosovu metodu (iterativna metoda);
- Nakon 30-te godine predloženo je niz približnih metoda.

Poslednjih 50- tak godina, za razliku od dosadašnjih klasičnih metoda, razvijaju se savremene ili moderne metode proračuna. Ove metode koriste matrični aparat i nazivaju se matrične metode, a sam način analize konstrukcija primjenom ovih metoda naziva se matrična analiza konstrukcija. Razvoj ovih metoda išao je uporedo sa razvojem računara.

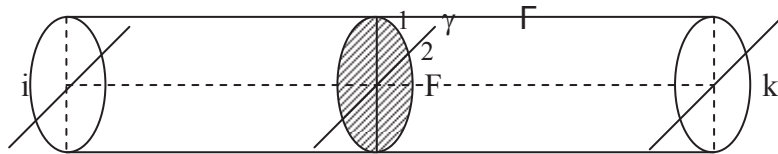
- ❖ Levy- daje osnovne jednačine metode sila u matričnom obliku sredinom 20 vijeka;
- ❖ Lang, Bisplinghof, Langefors, Wehlw, Lansing i drugi razrađuju koncept matrične formulacije metode sila uz primjenu računara;
- ❖ Levy a kasnije i Argyris sa saradnicima izlažu opštu matričnu formulaciju na bazi osnovnih energetske principa. Njihovi radovi predstavljaju osnovu za dalji razvoj metoda matrične analize konstrukcija.

Savremena analiza naponsko-deformacijskog stanja složenih inženjerskih konstrukcija ne može se zamisliti bez matrične formulacije i bez primjene računara.

1 TEORIJA ŠTAPA

1.1. OSNOVNE JEDNAČINE TEHNIČKE TEORIJE ŠTAPOVA U RAVNI

Oko zadate linije ik , koja je data na slici 1, u normalnim ravnima opisane su zatvorene krive γ , koje ograničavaju površinu F . Težište površine F se nalazi na liniji



Slika 1

ik . U poređenju sa dužinom linije ik površina F je mala. Geometrijsko mjesto tačaka γ čini površ Γ . *Tijelo koje ograničava površ Γ i površ F u tačkama i i k nazivamo štapom.*

Kada je riječ o krivom štapu onda je linija ik kriva linija, a kada je riječ o pravom štapu ik je prava linija. U ovom kursu govorićemo o pravim štapovima.

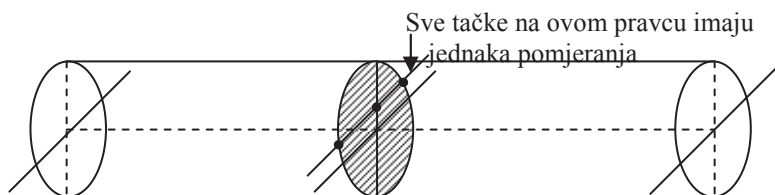
Liniju ik nazivamo *osa štapa*, dok su površi F *poprečni presjeci štapa*. Ako su poprečni presjeci štapa u svim tačkama isti riječ je o *štapu konstantnog poprečnog presjeka*, u suprotnom ako se poprečni presjeci mijenjaju duž ose štapa radi se o *štapu promjenljivog poprečnog presjeka*.

Štap čija osa sa jednom od glavnih centralnih osa inercija poprečnih presjeka leži u jednoj ravni nazivamo *ravan štap*, a odgovarajuću ravan nazivamo *ravan štapa*.

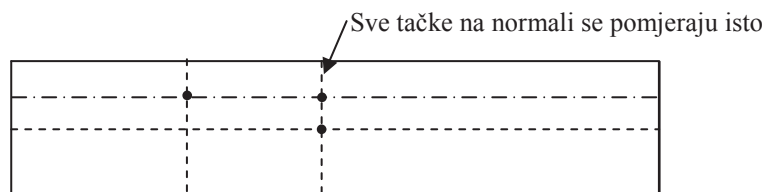
Štapovi čije su ose prostorne linije ili čije su ose prave ili krive linije ali ni jedna od centralnih osa inercije poprečnih presjeka ne leži u toj ravni nazivamo *prostorni štapovi*.

1.1.2. Deformacija ose štapa

Ako se tačke jednog ravnog štapa pomjeraju u ravnima koje su paralelne sa ravni štapa takvu deformaciju nazivamo **ravna deformacija štapa**.



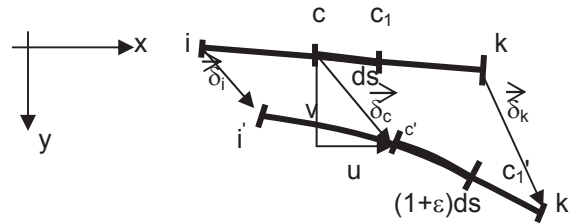
Slika 2.



Slika 2a.

Ako poznajemo pomjeranje tačke ose nosača moguće je sračunati i pomjeranje tačke na nekom rastojanju.

Posmatraćemo ravnu deformaciju ose štapa i-k.



Slika 3.

Na slici 3. prikazana je osa jednog ravnog štapa prije i posle deformacije. Pomjeranja tačaka ose štapa leže u jednoj ravni i to ravni ose nedeformisanog štapa, stoga će i deformisana osa i'k' ležati u istoj ravni. Vektori pomjeranja tačaka su određeni sa dvije komponente, jednu u pravcu x ose, komponenta u , i jednu u pravcu y ose, komponenta v . Pomjeranja $\vec{\delta} = \vec{\delta}(u, v)$ određuju deformisan oblik ose štapa, ali ne daju neposredan uvid u deformaciju malog elementa ose štapa. Ovo pomjeranje pored pomjeranja koja potiču od deformacija sadrži i ona pomjeranja koja potiču od promjene položaja ose u ravni štapa kao cjeline, kao i pomjeranja nenapregnutih djelova ose usljed deformacije napregnutih djelova ose. Zato, pored pomjeranja, uvodimo i veličine koje postoje samo na djelovima na kojima se napregnuta osa deformiše, i nazivamo ih *deformacijskim veličinama ose štapa*.

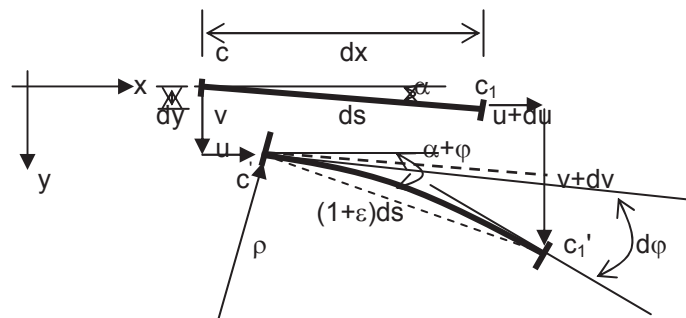
Da bi definisali veze deformacijskih veličina ose štapa i pomjeranja potrebno je posmatrati deformaciju jednog diferencijalnog elementa ose štapa c-c1. Pri deformaciji ovaj element ose štapa mijenja dužinu za veličinu ϵdx i obrće se za ugao φ .

ϵ - specifična promjena dužine, odnosno, *dilatacija elementa ose štapa*. Ovo je čista deformacijska veličina jer postoji samo na onim mjestima na kojima se osa deformiše.

φ - je ugao za koji se obrne element ose štapa. Ovo nije čista deformacijska veličina jer može postojati i bez deformacije elementa.

$d\varphi$ - je promjena ugla između tangenti u beskonačno bliskim tačkama ose. Ovo je čisto deformacijska veličina i ako se element ne deformiše jednaka je nuli.

Čiste deformacijske veličine su ove deformacijske veličine koje postoje samo na deformisanom štapu, odnosno, na nedeformisanom štapu jednake su nuli.



Slika 4.

Sa slike 4. je očigledno da za element štapa dx prije deformacije važe sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \alpha \\ dy &= ds \sin \alpha \end{aligned}$$

i da se za isti element štapa posle deformacije može napisati da je:

$$\begin{aligned} dx+u+du &= u+(1+\varepsilon)ds \cos(\alpha+\varphi) \\ dy+v+dv &= v+(1+\varepsilon)ds \sin(\alpha+\varphi) \quad (\text{nelinearni sistem jednačina}) \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobija se nelinearan sistem jednačina:

$$\begin{aligned} du &= (1+\varepsilon)ds \cos(\alpha+\varphi) - dx \\ dv &= (1+\varepsilon)ds \sin(\alpha+\varphi) - dy \end{aligned} \quad (1)$$

Jednačine (1) predstavljaju veze pomjeranja u i v , obrtanja φ i dilatacije ε . Teorija zasnovana na ovakvim vezama naziva se *teorija konačnih ili teorija velikih deformacija*.

Pomjeranja, obrtanja i deformacijske veličine elementa ose štapa često su male veličine, tako da je opravdano njihove kvadrate i više stepene kao i kvadrate i više stepene njihovih izvoda zanemariti. Ovakva pretpostavka naziva se *pretpostavka o malim deformacijama* ($\varphi \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$ i $\varphi \varepsilon \approx 0$) a teorija koja se zasniva na ovoj pretpostavci naziva se *teorija malih deformacija*. Sa pretpostavkom o malih deformacijama dobija se da su:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1 - \varphi^2/2! + \varphi^4/4! - \dots \approx 1 & \sin \varphi &= \varphi - \varphi^3/3! + \varphi^5/5! - \dots \approx \varphi \\ \cos(\alpha+\varphi) &= \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \approx \cos \alpha - \varphi \sin \alpha \\ \sin(\alpha+\varphi) &= \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi \approx \sin \alpha + \varphi \cos \alpha \end{aligned}$$

Kada se ova pretpostavka ubaci u relacije (1), vodeći računa o vezama $dx=ds \cos \alpha$ i $dy=ds \sin \alpha$, dobijaju se jednostavnije veze pomjeranja i deformacija:

$$du = \varepsilon dx - \varphi dy \quad dv = \varepsilon dy + \varphi dx \quad (2)$$

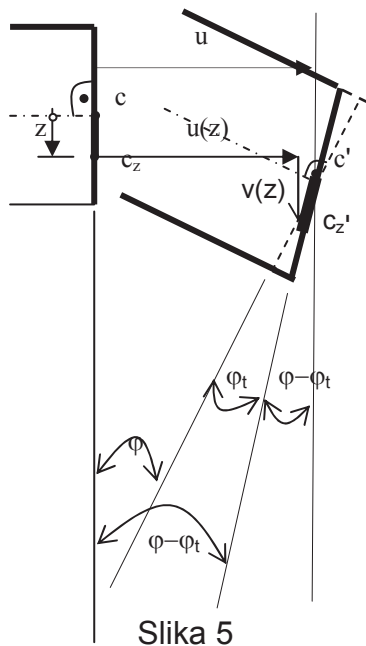
Odnosno, dobija se linearni sistem jednačina koje definišu veze pomjeranja u i v sa deformacijskim veličinama, dilatacijama ε , uglovima obrtanja tangente na deformisanu liniju φ u teoriji malih deformacija. Pretpostavku o malim deformacijama zbog toga nazivamo pretpostavkom o geometrijskoj linearnosti problema.

1.1.3. Deformacija štapa

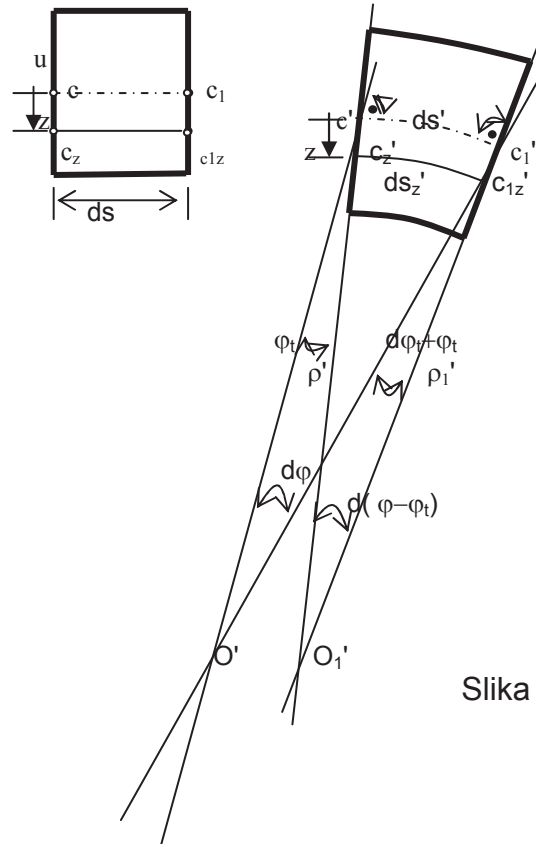
Kada razmatramo deformaciju štapa kao tijela, polazimo od Bernolli-jeve pretpostavke o nedeformabilnom poprečnom presjeku, tj. *da pri deformaciji štapa poprečni presjeci ostaju ravni i upravni na deformisanu osu štapa*. Ova pretpostavka

je osnovna pretpostavka tehničke teorije savijanja štapa pomoću koje se trodimenzionalan problem deformacije štapa kao tijela svodi na jednodimenzionalan problem deformacije njegove ose. Iz otpornosti materijala je poznato da je ova pretpostavka tačna samo za prave prizmatične štapove napregnute na čisto savijanje. Pri savijanju štapa poprečnim silama dolazi do vitoperenja poprečnih presjeka. Uticaj vitoperenja presjeka, tj. uticaj tranverzalnih sila na deformaciju štapa, toliko je mali, da se može ili potpuno zanemariti ili približno odrediti zadržavajući pretpostavku o ravnim ali ne i upravnim poprečnim presjecima na deformisanu osu štapa.

Na slici 5 je prikazan dio štapa prije i posle deformacije.



Slika 5

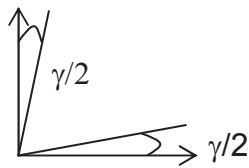


Slika 6

Pri ravnoj deformaciji osa štapa ostaje u ravni štapa i poslije deformacije, a poprečni presjeci ostaju normalni na tu ravan. Kako se poprečni presjeci ne deformišu sve tačke koje leže na pravoj normalnoj na ravan štapa imaju ista pomjeranja. Tačka c_z koja je prije deformacije bila na rastojanju z od tačke c , ostaje i poslije deformacije na istom odstojanju od tačke c' na deformisanoj osi štapa.

Ako promjenu pravog ugla između poprečnog presjeka i ose prije i posle deformacije obelježimo sa φ_t , tada je ugao ukupnog obrtanja poprečnog presjeka jednak razlici $\varphi - \varphi_t$. Pri tome je φ_t pozitivno ako mu je smjer suprotan pozitivnom smjeru obrtanja φ .

φ_t – klizanje poprečnog presjeka, čisto deformacijska veličina. Klizanje je promjena ugla između dva pravca pri deformaciji.



$$\begin{aligned} u_z &= u - z \sin(\varphi - \varphi_t), & \sin(\varphi - \varphi_t) &= \varphi - \varphi_t \\ z + v_z &= v + z \cos(\varphi - \varphi_t), & \cos(\varphi - \varphi_t) &= 1 \end{aligned}$$

jer se radi o malim veličinama pa su:

$$(\varphi - \varphi_t) \ll 1, \quad \cos(\varphi - \varphi_t) \approx 1, \quad \sin(\varphi - \varphi_t) \approx (\varphi - \varphi_t)$$

Na taj način dolazimo do pomjeranja tačke na rastojanju z od ose štapa uz prethodno poznavanje veličine klizanja:

$$u_z = u - z(\varphi - \varphi_t)$$

$$v_z = v$$

Na slici 6 je prikazana deformacija elementa štapa.

Osim dilatacije elementa ose štapa potrebno je odrediti i dilataciju elementa na odstojanju z od ose štapa. Ova dilatacija se označava sa $\varepsilon(z)$. Rastojanje z je isto prije i poslije deformacije. Poprečni presjeci ostaju ravni ali se rotiraju nakon deformacije. Na slici 6. je prikazan element koji je prije deformacije označen sa c - c_1 a nakon deformacije sa c' - c_1' . Dužina elementa poslije deformacije je

$$ds' = (1 + \varepsilon) ds$$

Na rastojanju z od ose deformisana dužina elementa je:

$$ds_z' = (1 + \varepsilon_z) ds$$

pošto su presjeci suprotno zarotirani $ds' \neq ds_z'$

Kada uočimo trouglove $\Delta c'c_1'O'$ i $\Delta c_z'c_{z1}'O_1'$ na slici 6 i primijenimo sinusnu teoremu dobijamo:

$$\frac{(1 + \varepsilon) ds}{\sin[d(\varphi - \varphi_t)]} = \frac{\rho_1'}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)} \quad (3)$$

$$\frac{(1 + \varepsilon_z) ds}{\sin[d(\varphi - \varphi_t)]} = \frac{\rho_1' - z}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)} \quad (4)$$

ρ_1' - poluprečnik krivine

$$\sin(\pi/2) = \cos \varphi_t \quad \varphi_t \ll 1 \quad \cos \varphi_t \approx 1$$

Iz relacije (3) se dobija:

$$(1+\varepsilon)ds = \rho_1' \sin(d(\varphi - \varphi_t))$$

dok se iz relacije (4) dobija da je:

$$(1+\varepsilon_z)ds = (\rho_1' - z) \sin(d(\varphi - \varphi_t))$$

Pošto je:

$$\begin{aligned} d(\varphi - \varphi_t) &\ll 1 \\ \sin(d(\varphi - \varphi_t)) &\approx d(\varphi - \varphi_t) \end{aligned}$$

slijedi da je:

$$(1+\varepsilon)ds = \rho_1' d(\varphi - \varphi_t)$$

$$(1+\varepsilon_z)ds = (\rho_1' - z) d(\varphi - \varphi_t)$$

$$(1+\varepsilon_z)ds = (1+\varepsilon)ds - z d(\varphi - \varphi_t) \quad /:ds$$

$$1+\varepsilon_z = (1+\varepsilon) - z d(\varphi - \varphi_t)/ds$$

Ako diferencijal ugla obrtanja poprečnog presjeka označimo sa χ - promjena krivine štapa tada je:

$$\chi = -\frac{d(\varphi - \varphi_t)}{ds} \quad (5)$$

Na taj način uveli smo treću čisto deformacijsku veličinu , promjenu krivine, pored prethodne dvije dilatacije ose ε i klizanja φ_t .

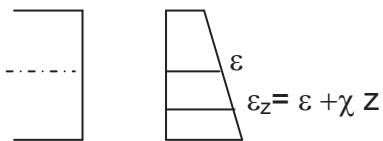
Po koordinati debljine z dilatacija je linearna:

$$\varepsilon_z = \varepsilon + z\chi \quad (6)$$

Veličine ε i χ predstavljaju deformacijske veličine elementa ose štapa koje ne zavise od veličine z, pa slijedi da je dilatacija ε_z linearna .

Prema tome zaključujemo da Bernoulli-evoj pretpostavci o ravnim poprečnim presjecima odgovara linearna raspodjela dilatacija po visini poprečnog presjeka kosog štapa.

Klizanje φ_t je po visini poprečnog presjeka svuda jednako:



1.1.4. Spoljašnje i unutrašnje sile

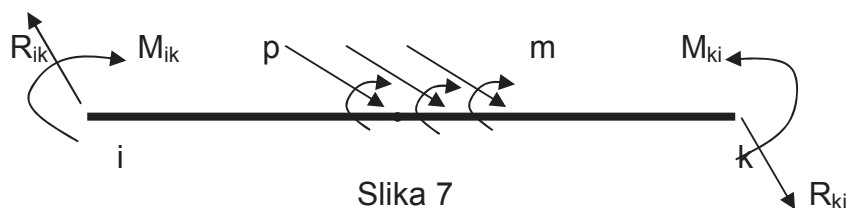
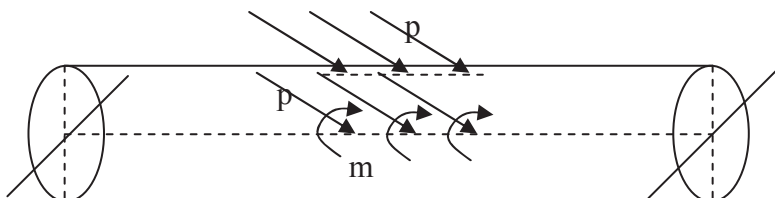
Spoljašnje sile predstavljaju uticaj drugih tijela na štap i dijele se na

- zapreminske i
- površinske sile

Spoljašnje sile se mogu podijeliti i na:

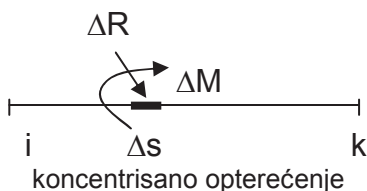
- aktivne sile – opterećenje štapa
- reaktivne sile – reakcije i momenti uklještenja

Saglasno tehničkoj teoriji savijanja štapa, deformacije i naponi u štapu zavise samo od rezultanti spoljašnjih sila koji djeluju na elementu štapa između beskonačno bliskih poprečnih presjeka, a ne zavise od raspodjele tih sila po omotaču elementa. Zato spoljašnje sile zamjenjujemo statički ekvivalentnim silama i momentima raspodijeljenim duž ose štapa.



Slika 7

Specifična raspodijeljena spoljašnja sila predstavlja vektor koji može imati proizvoljan pravac u prostoru i obelježava se sa p . Kako se na štap prenose pored zapreminskih i površinske sile, koje djeluju na omotač štapa to se redukcijom na osu štapa vektoru raspodijeljenih sila p mora dodati i vektor raspodijeljenih momenata m . Da bi štap bio ravan štap (u ravni) to sile p i spregovi momenata m moraju ležati u ravni štapa (slika 7).



koncentrisano opterećenje

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta s} = \frac{dR}{ds} = p$$

raspodijeljena sila

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta s} = \frac{dM}{ds} = m$$

raspodijeljeni momenti



raspodijeljena sila



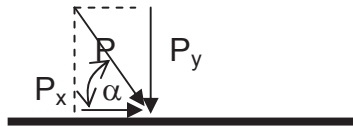
raspodijeljeni momenti

Slika 8.

Oprećenje p i m velikog intenziteta na kratkom dijelu ose štapa može se zamijeniti njihovim rezultantama P i M uvodeći pojam koncentrisog opterećenja silom P i koncentrisanog opterećenja momentom M .

Vrlo često se raspodijeljeni momenti m kao male veličine zanemarju, ako nije drugačije naglašeno.

Opterećenje p odnosno P razlažemo na pravac x i pravac y :

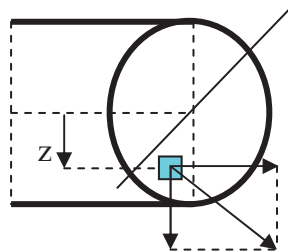


$$P_y = P \sin \alpha$$

$$P_x = P \cos \alpha$$

Spoljašnje sile izazivaju u štapu unutrašnje sile. Unutrašnje sile su površinske sile koje se prenose preko zamišljenih presjeka u tijelu štapa, a koje izražavamo kao rezultante pojedinih napona.

Slika 9.



$$N = \int_F \sigma dF$$

$$T = \int_F \tau dF$$

$$M = \int_F \sigma z dF$$
(7)

F - površina poprečnog presjeka

N - normalna sila , sila u pravcu ose štapa

T – transverzalna sila, u ravni presjeka a upravna na osu štapa

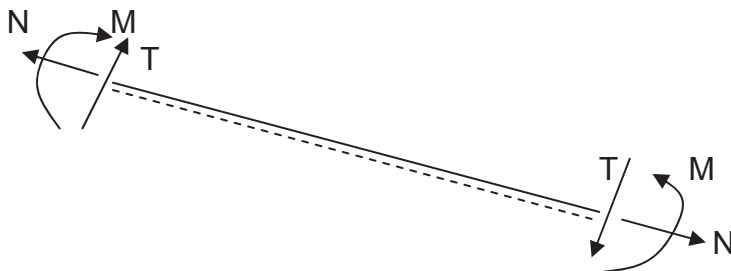
M - moment savijanja

Sile N , T i M nazivamo zajedničkim imenom *sile u presjeku ili presječne sile*. One predstavljaju međusobni uticaj štapa lijevo i desno od posmatranog presjeka.

Prema zakonu akcije i reakcije sile u proizvoljnom presjeku koje napadaju lijevi dio su suprotnog smjera i istog intenziteta u odnosu na sile koje djeluju desno od posmatranog presjeka.

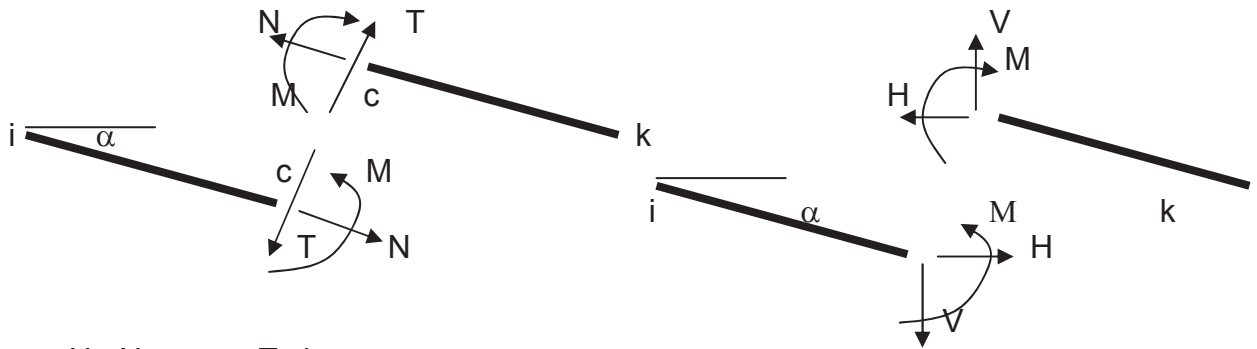
U ovom kursu primjenjivaćemo sljedeću konvenciju o pozitivnom smjeru:

- normalna sila je pozitivna kada isteže štap
- transverzalna sila je pozitivna kada suprotan kraj štapa obrće u smjeru kazaljke časovnika
- moment savijanja je pozitivan kada zateže donju stranu štapa.



Slika 10.

Uvodimo oznake za komponente sila, date na sljedećoj slici, proizvoljnog presjeka c posmatranog štapa i-k i definišemo njihove veze na sljedeći način:



$$H = N \cos \alpha - T \sin \alpha$$

$$V = N \sin \alpha + T \cos \alpha$$

$$N = H \cos \alpha + V \sin \alpha$$

$$T = H \sin \alpha + V \cos \alpha$$

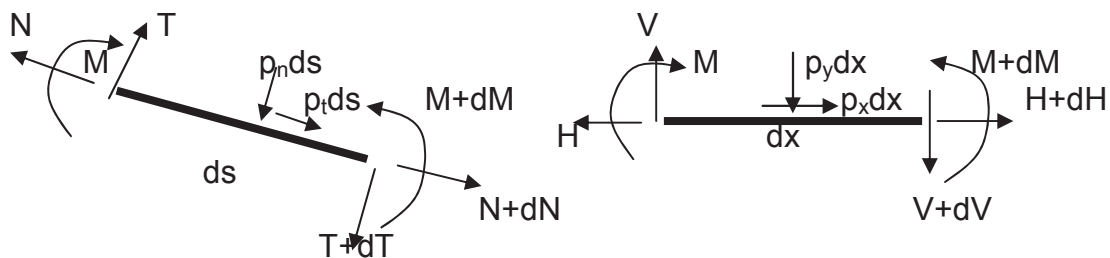
Zadatak statike konstrukcija je riješen kada znamo, odnosno odredimo, u svim presjecima sile. Poznavajući sile mogu se odrediti i naponi u presjecima primjenom veza (7).

1.1.5. Uslovi ravnoteže elementa štapa

U statici konstrukcija pretpostavljamo da je porast opterećenja postepen, da i pomjeranja postepeno rastu, tako da ubrzanja tačaka ose štapa možemo zanemariti. Pri tome spoljašnje sile uvijek stoje u ravnoteži sa unutrašnjim silama u toku čitavog procesa deformacije. Kada se zustavi proces rasta deformacija i kada štap pređe u stanje mirovanja tada se uspostavlja konačna ravnoteža između spoljašnjih i unutrašnjih sila.

Kako su pomjeranja tačaka u odnosu na dimenzije štapa, kao i deformacije u odnosu na jedinicu, redovno male veličine, to pri pisanju uslova ravnoteže možemo zanemariti pomjeranja napadnih tačaka spoljašnjih i unutrašnjih sila. Na taj način pretpostavlja se da spoljašnje sile staje u ravnoteži sa unutrašnjim silama na nedeformisanom štapu.

Uslove ravnoteže elementa štapa mogu se prikazati na sljedeći način:



Slika 11.

$$\begin{aligned} dN + p_t ds &= 0 \\ dT + p_n ds &= 0 \\ dM - T ds &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dH + p_x dx &= 0 \\ dV + p_y dy &= 0 \\ dM - T dx &= 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo da uslovi ravnoteže predstavljaju vezu spoljašnjih sila i sila u presjecima na nedeformisanom štapu.

1.1.6. Veze između deformacijskih veličina elementa ose štapa, sila u presjecima i temperaturnih promjena

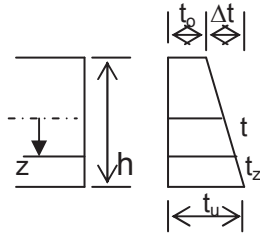
Usvajamo da važi Hukov zakon, odnosno, da je materijal idealno elastičan je veza napona i deformacija linearna. Tada je :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} + \alpha_t t(z) \quad (8)$$

Gdje su ε_z , σ_z i $t(z)$ dilatacija, normalni napon i temperaturna promjena u tački poprečnog presjeka koja se nalazi na odstojanju z od ose štapa.

α_t je koeficijent linearne temperaturne dilatacije materijala.

Ako obelježimo sa t_o temperaturu u gornjem vlaknu, t_u temperaturu u donjem vlaknu, i pretpostavimo da se temperatura linearno mijenja po visini presjeka h tada je:



Slika 12.

$$\Delta t = t_u - t_o$$

Δt - temperaturna razlika

$$t = (t_u + t_o)/2 \text{ temperaturna promjena}$$

Iz relacije (8) slijedi da je:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z - \alpha_t \left(t + z \frac{\Delta t}{h} \right) E$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon + z\chi$$

$$\sigma_z = E(\varepsilon + z\chi) - \alpha_t E \left(t + z \frac{\Delta t}{h} \right)$$

$$\sigma_z = E(\varepsilon - \alpha_t t) + Ez \left(\chi - \frac{\Delta t}{h} \right)$$

Kada ovaj izraz unesemo u izraze (7) koji predstavljaju vezu napona i sila u presjecima dobija se:

$$N = \int_F \sigma(z) dF = \int_F E(\varepsilon - \alpha_t t) dF + \int_F E \left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) z dF = E(\varepsilon - \alpha_t t) \int_F dF + E \left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) \int_F z dF = EF(\varepsilon - \alpha_t t)$$

$$M = \int_F z\sigma(z) dF = \int_F E(\varepsilon - \alpha_t t) z dF + \int_F E \left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) z^2 dF = E(\varepsilon - \alpha_t t) \int_F z dF + E \left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right) \int_F z^2 dF = EI \left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right)$$

Veličine $E\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)$ i $E(\varepsilon - \alpha_t t)$ su konstantne za dati poprečni presjek I uz sljedeće

veze:

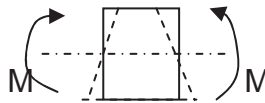
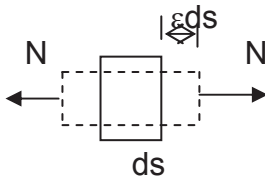
$$\int_F dF = F \quad \int_F z dF = 0 \quad \int_F z^2 dF = I$$

Dobijamo veze sila u presjecima i deformacijske veličina:

$$\begin{aligned} N &= EF(\varepsilon - \alpha_t t) \\ M &= EI\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Odnosno veze deformacijske veličina i sila u presjecima (vidi sliku koja slijedi):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t \\ \chi &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \end{aligned} \quad (10)$$



Na sličan način možemo napisati izraz koji daje vezu ugla klizanja $\gamma(z)$ i smičućeg napona $\tau(z)$ u tačkama presjeka koje leže na odstojanju z od ose štapa:

$$\gamma(z) = \frac{\tau(z)}{G}$$

gdje je G moduo klizanja.

Ako u ovu relaciju uvedemo izraz za smičući napon koji je izveden u otpornosti materijala na osnovu hipoteze Žuravskog:

$$\tau(z) = \frac{TS}{bI}$$

gdje je: S -statički moment dijela površine iznad i ispod prave linije $z = \text{const}$

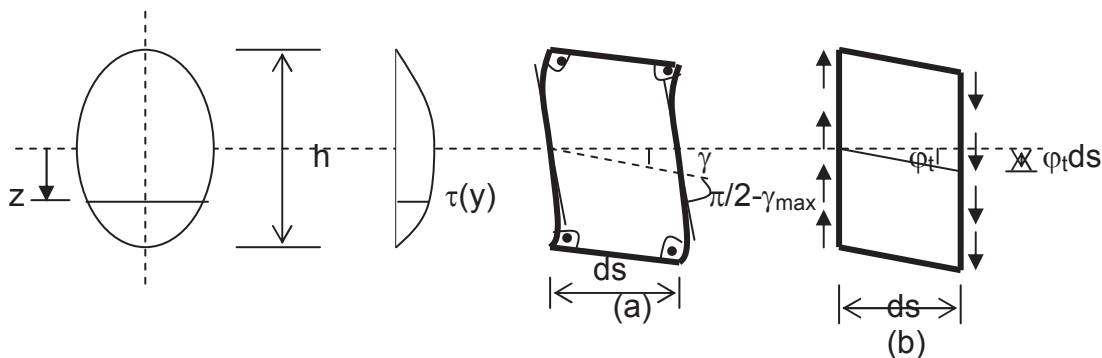
b - širina poprečnog presjeka na mjestu z

I – moment inercije presjeka

dobijamo:

$$\gamma(z) = \frac{TS}{bIG} \quad (11)$$

γ - promjena ugla između dva prvobitno upravna pravca.



slika 13.

Ugao klizanja ima istu promjenu kao napon smicanja. Zbog ovakve promjene ugla klizanja presjeci se vitopere kako je to dato na slici 13a.

Ako stvarnu raspodjelu uglova klizanja zamijenimo raspodjelom datoj na slici 13b, tada poprečni presjek po visini trpi konstantnu vrijednost klizanja. Svi poprečni presjeci tada ostaju ravni ali smaknuti za veličinu $\varphi_t ds$, gdje je φ_t promjena ugla između poprečnog presjeka i ose štapa.

Ugao φ_t može da se odredi na više načina, a najpogodnije je odrediti ga iz uslova da je rad napona smicanja na posmatranom elementu štapa pri stvarnoj raspodjeli ugla klizanja jednak radu tih napona pri pretpostavljenoj raspodjeli klizanja. Tako možemo napisati:

$$dA = \int_F \tau \gamma ds dF = ds \int_F \frac{\tau^2}{G} dF = ds \frac{T^2}{GF} \frac{F}{I^2} \int_F \frac{s^2}{b^2} dF = k ds \frac{T^2}{GF}$$

$$d\bar{A} = \int_F \tau \varphi_t ds dF = \varphi_t ds \int_F \tau dF = \varphi_t ds T$$

$$d\bar{A} = dA$$

$$k ds \frac{T^2}{GF} = \varphi_t ds T \quad \varphi_t = \frac{kT}{GF}$$

1.1.5. Pregled jednačina i graničnih uslova teorije savijanja štapa u ravni

Na osnovu do sada rečenog možemo ispisati sljedeće veze pomjeranja, deformacijskih i statičkih veličina:

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon dx - \varphi dy \\ dv &= \varepsilon dy + \varphi dx \\ d(\varphi - \varphi_t) &= -\chi ds \end{aligned} \tag{A}$$

$$\begin{aligned} dN + p_t ds &= 0 \\ dT + p_n ds &= 0 \\ dM - T ds &= 0 \end{aligned} \tag{B}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$

$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\varphi_t = \frac{kT}{GF}$$
(C)

Na raspolaganju nam stoji devet jednačina (A, B i C) sa 9 nepoznatih :

- dva pomjeranja u, v i obrtanje φ ;
- tri statičke veličine N, T, M sile i momenti;
- tri deformacijske veličine $\varepsilon, \chi, \varphi_t$ dilatacija, promjena krivine i klizanje.

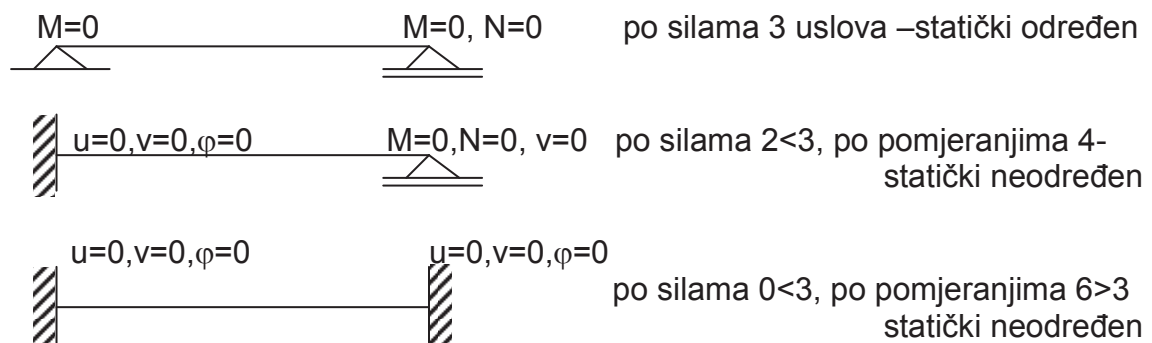
Prvih 6 jednačina su diferencijalne, a posljednje tri su algebarske jednačine. Za rješavanje ovog sistema su nam potrebni granični uslovi, koji mogu biti po sila ili po pomjeranjima. Veličine $\varepsilon, \chi, \varphi_t$ moguće je eliminisati iz sistema i svesti problem određivanja sila u presjecima i pomejeranja na sistem od 6 linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa šest nepoznatih.

Da bi ovaj sistem mogli riješiti potrebno je da pored geometrijskih podataka o presjecima i podataka koji definišu geometriju ose štapa, fizičkih konstanti i spoljašnjih uticaja treba poznavati još 6 graničnih uslova iz kojih se mogu odrediti integracione konstante integrala ovih diferencijalnih jednačina.

Ti uslovi mogu biti zadati kao uslovi po silama ili kao uslovi po pomjeranjima. Pri tome maksimalan broj uslova po silama je tri, dok je minimalan broj uslova po pomjeranjima tri.

Kada su tri granična uslova po silama i tri granična uslova po pomjeranjima tada kažemo da zadatak statički određen i da u linearnoj teoriji sile u presjecima mogu da se izračunaju iz uslova ravnoteže i graničnih uslova po silama nezavisno od pomjeranja štapa.

Kada jedan, dva ili tri granična uslova po silama zamijenimo graničnim uslovima po pomjeranjima tada sile u presjecima ne mogu da se odrede iz uslova ravnoteže nezavisno od pomjeranja tačaka i obrtanja presjeka. Tada je zadatak proračuna sila u presjecima statički neodređen.



U linearnoj teoriji konstrukcija važi princip superpozicije uticaja.

1.1.8. Integrali uslova ravnoteže elementa štapa i izrazi za sile u presjecima

Vidjeli smo da uslovi ravnoteže elementa štapa predstavljaju sistem od 3 linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa nepoznatim silama N , T i M . Direktnom integracijom tih jednačina od i do c posmatranog štapa ik dobija se:

$$\begin{aligned} N_c &= N_i - \int_i^c p_x dx \\ T_c &= T_i - \int_i^c p_y dx \\ M_c &= M_i + \int_i^c T dx \end{aligned} \quad (12)$$

Primjenom parcijalne integracije dobijamao:

$$\int_i^c T dx = T x \Big|_i^c - \int_i^c x dT = T_c x_c - T_i x_i - \int_i^c x dT$$

Promjena transversalne sile se može napisati kao $dT = -p_y dx$ i dobija se da je

$$\int_i^c T dx = T_c x_c - T_i x_i + \int_i^c x p_y dx$$

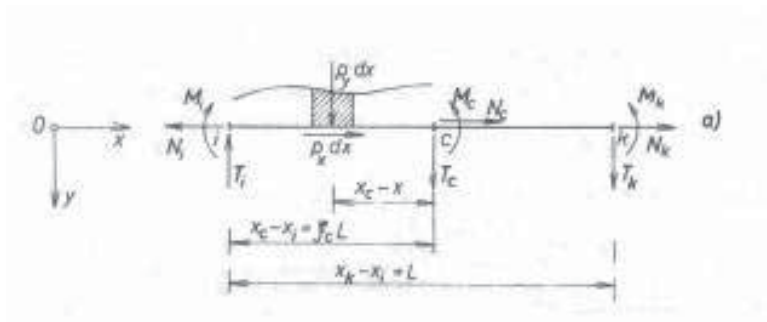
Ako u ovaj izraz ubacimo vezu koja se dobija kada se relacija 12b pomnoži sa x_c slijedi da je:

$$\int_i^c T dx = T_i (x_c - x_i) - \int_i^c p_y (x_c - x) dx$$

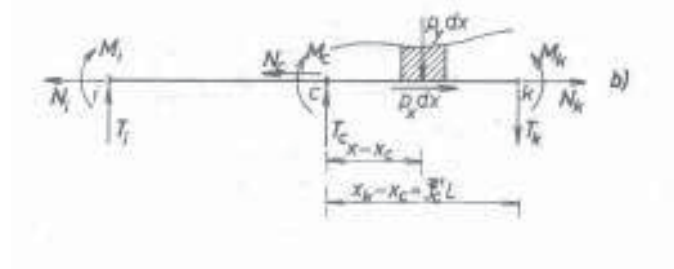
Sada se sistem jednačina (12) može napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} N_c &= N_i - \int_i^c p_x dx \\ T_c &= T_i - \int_i^c p_y dx \\ M_c &= M_i + T_i (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y dx \end{aligned} \quad (13)$$

Jednačine (13) predstavljaju integrale uslova ravnoteže elementa štapa, odnosno, *uslove ravnoteže svih sila na konačnom dijelu štapa od i do c* (slika 14.).



Slika 14.



Slika 15.

Sličnim postupkom možemo izvesti izraze za sile u presjeku c integracijom uslova ravnoteže elementa štapa od c do k (slika 15.):

$$\begin{aligned}
 N_c &= N_k + \int_c^k p_x dx \\
 T_c &= T_k + \int_c^k p_y dx \\
 M_c &= M_k - T_k(x_k - x_c) - \int_c^k (x - x_c) p_y dx
 \end{aligned} \tag{14}$$

Na osnovu jednačina (13) i (14) može se iskazati sljedeće:

- Normalna sila N_c u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru komponentata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u pravcu ose štapa.
- transverzalna sila T_c u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru komponentata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u pravcu upravnom na osu štapa.
- Moment savijanja M_c u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u odnosu na težište tog presjeka.

Kada je štap neopterećen duž ose štapa tada je $p_x=p_y=0$, pa sile u presjeku c zavise samo od sila na krajevima štapa i, odnosno, k:

$$\begin{aligned}
 N_c &= N_i = N_k \\
 T_c &= T_i = T_k \\
 M_c &= M_i + T_i(x_c - x_i) = M_k - T_k(x_k - x_c)
 \end{aligned}$$

Iz jednačina 13 i 14 primjećuje se da se sile u proizvoljnom presjeku štapa mogu odrediti ako su pored zadatog opterećenja p_x i p_y poznate i sile na jednom ili na drugom kraju štapa, ili bilo koje tri veličine X_1 , X_2 i X_3 iz kojih se sile na krajevima štapa mogu izračunati.

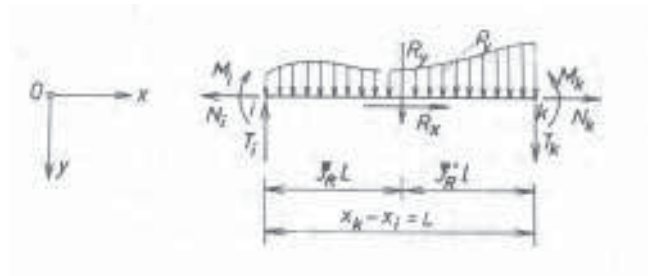
Veličine X_i , $i=1,2,3$ mogu biti komponente sila u određenim poprečnim presjecima ili linearne funkcije ovih komponentata, a najpogodnije je izabrati da su sile na krajevima štapova:

$$X_1 = X_1(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$$

$$X_2 = X_2(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$$

$$X_3 = X_3(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$$

Sile na krajevima štapa i – k nijesu međusobno nezavisne već moraju zadovoljiti uslove ravnoteže štapa kao cjeline:



Slika 16.

$$N_k - N_i + R_x = 0 \quad (15)$$

$$T_k - T_i + R_y = 0$$

$$M_k - M_i - T_i L + R_y \xi'_R L = 0 \quad \text{ili} \quad M_k - M_i - T_k L + R_y \xi_R L = 0$$

$$R_x = \int_i^k p_x dx, \quad R_y = \int_i^k p_y dx,$$

gdje su :

$$R_y \xi'_R L = \int_i^k (x_k - x) p_y dx, \quad R_y \xi_R L = \int_i^k (x - x_i) p_y dx,$$

$\xi'_R L$ i $\xi_R L$ –odstojanje rezultante opterećenja od kraja k , odnosno, kraja i.

Tri definisane veze sila X_i ($i=1,2,3$) zajedno sa tri uslova ravnoteže štapa kao cjeline predstavljaju sistem od 6 linearnih algebarskih jednačina sa 6 nepoznatih sila na krajevima štapa $N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k$. Kada si funkcije X_i međusobno nezavisne i nezavisne od uslova ravnoteže tada se ovaj sistem može riješiti. Veličine X_i ($i=1,2,3$) se nazivaju *statički nezavisne veličine štapa ili statični neodređene veličine*.

Najpogodnije je izabrati da ove veličine budu:

$$X_1 = M_i, \quad X_2 = M_k, \quad X_3 = S_{ik} = (N_i + N_k)/2$$

Preostale sile se određuju iz uslova ravnoteže štapa.

$$\text{Iz } \Sigma x \text{ slijedi:} \quad N_i - N_k = R_x$$

$$N_i + N_k = 2S_{ik}$$

Ako riješimo ove jednačine dobija se:

$$N_i = S_{ik} + R_x/2 \quad i \quad N_k = S_{ik} - R_x/2$$

Iz relacija 15c dobija se:

$$T_i = R_y \xi'_R + \frac{M_k - M_i}{L}$$

$$T_k = -R_y \xi'_R + \frac{M_k - M_i}{L}$$

Kada su određene sile na krajevima N_i , N_k , T_i i T_k onda se sile u proizvoljnom poprečnom presjeku c dobijaju na sljedeći način:

$$N_c = S_{ik} + N_{c,o}$$

$$T_c = \frac{M_k - M_i}{L} + T_{c,o}$$

$$M_c = M_i \xi'_c + M_k \xi_c + M_{c,o}$$

gdje veličine $N_{c,o}$, $T_{c,o}$ i $M_{c,o}$ zavise od zadatih sila p_x i p_y i njihovih rezultanti:

$$N_{c,o} = \frac{R_x}{2} - \int_i^c p_x dx$$

$$T_{c,o} = R_y \xi'_R - \int_i^c p_y dx$$

$$M_{c,o} = R_y \xi'_R (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y dx$$

I ako je jednostavno prikazati sile u presjecima primjenom analitičkih izraza, mnogo češće promjenu sila prikazujemo graphicima koji se u Statici konstrukcija nazivaju *dijagrami presječnih sila* ili *dijagrami sila u presjecima*.

Kako smo i prikazali analitičkim izrazima i dijagrami presječnih sila se sastoje iz dva dijela:

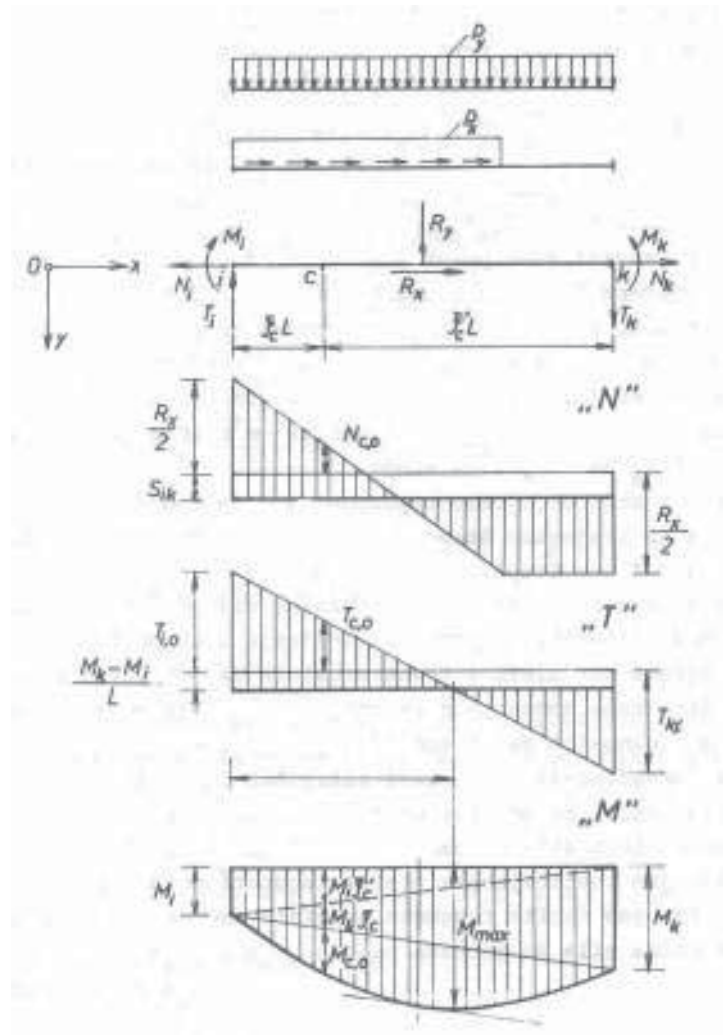
- dijela koji zavisi od sila raspodijeljenih po dužini ose štapa
- dijela koji zavisi od sila na krajevima.

Oblici dijagrama sila u presjecima zavise od raspodjele opterećenja po dužini štapa.

Izrazi za normalnu i transverzalnu silu koji zavise od sila na krajevima predstavljaju konstante i njihov dijagram ima oblik pravougaonika, dok momenti imaju linearnu zavisnost duž ose štapa (slika 17.).

Kada crtamo dijagrame jednostavno superponiramo dijagrame od sila na krajevima štapa i dijagram koji potiče od opterećenja na štapu.

Pri iscrtavanju dijagrama presječnih sila pozitivne normalne i transverzalne sile nanosimo na "gornju" stranu štapa i redovno upisujemo znak, dok pri iscrtavanju dijagrama momenata, momente nanosimo na onu stranu štapa koja je zategnuta i ne upisujemo znak.



Slika 17.

Iz izvedenih jednačina se vidi da je grafik transverzalne sile funkcija prvog izvoda funkcije momenata savijanja, odnosno, promjena ugla nagiba tangente na liniju dijagrama momenata. Ako je ugao nagiba tangente nula i transverzalna sila je nula.

1.1.9. Integrali deformacijskih jednačina i izrazi za pomjeranja i obrtanja

Kada su sračunate sile u presjecima N , T i M i kada su poznate temperaturne promjene t i Δt , deformacijske veličine se određuju iz sljedećih izraza:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t \\ \chi &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \\ \varphi_t &= \frac{kT}{GF}\end{aligned}\tag{16}$$